تطبيقات على نظرية كمية الحركة:

ملاحظة: - في الحركة المادية لا يوجد حاملة حركة وإنما مجموع حركة.

مثال: لتأخذ صفيحة متجانسة عرضها a وطولها b ومعلقة من نقطتين A و D بخيطين متماثلين.

حركة هذه الصفيحة ABCD هي حركة انسحابية ومستوية (لأنها تتحرك تحت تأثير ثقلها فقط) وعدد درجات الحركة 1 وهو φ الزاوية المطلقة.

احداثيات النقطة $A(x,y)$:

$$x = l.\cos\varphi$$
$$y = l.\sin\varphi$$

حيث l هو طول الخيط

واحداثيات مركز الكتلة G:

$$x_G = \frac{x_A + a}{2}$$
$$y_G = \frac{y_A + b}{2}$$

لإيجاد القانون الزمني لحركة هذه الصفيحة نتعامل معها كما نتعامل مع النواس البسيط بأحد الخيطين، أما الخيط الثاني فرض على الحركة أنها انسحابية.

لدينا خيطين حيث φ هي الزاوية. إذا نحتاج إلى ثلاث معادلات.

تطبيق نظرية كمية الحركة

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{ext}$$

الشكل: القوى الخارجية $m\vec{g}$

بالاحداثيات الديكارتية:

$$\Rightarrow \vec{p} = m\vec{v} = m.\dot{x}\vec{i} + m\dot{y}\vec{j}$$

كما يمكن أن نجدها بالاحداثيات الطبيعية τ, n:

لدينا $\vec{OA} = r.\vec{e_r}$

$$\Rightarrow \vec{v} = v\vec{e_r} + r\frac{d\vec{e_r}}{dt}$$

شعاع ثابت الطول متغير الاتجاه

الموضوع

$$\Rightarrow \frac{d\vec{e_r}}{dt} = \frac{d\vec{e_r}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

$$= \vec{e_\theta} \cdot \dot{\theta} = \dot{\theta}\,\vec{e_\theta}$$

$$\Rightarrow \vec{V} = V\,\vec{e_r} + r\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}$$

(إذا كان [illegible] $\vec{e_\theta}, \vec{e_r}$ [illegible] XOY [illegible]

وبالتالي،

$$m\ddot{x}\,\vec{i} + m\ddot{y}\,\vec{j} = mg\,\vec{i} + (R_{1x} + R_{2x})\,\vec{i} + (R_{1y} + R_{2y})\,\vec{j}$$

يصعب [illegible] هذه العلاقة [illegible].

لذلك نسقط العلاقة

$$\vec{V} = V\,\vec{e_r} + r\,\frac{d\vec{e_r}}{dt}$$

$$= V\vec{e_r} + r\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}$$

[illegible] $\vec{r}$ [illegible]

$$\Rightarrow \vec{V} = 0 + r\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} \Rightarrow \vec{V} = r\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}$$

لأن النقطة A [illegible] دائرة

$$\Rightarrow \vec{\Gamma} = \vec{\dot{V}} = r\ddot{\theta}\,\vec{e_\theta} + r\dot{\theta}\,\frac{d\vec{e_\theta}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{e_\theta}}{dt} = \frac{d\vec{e_\theta}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

$$= \frac{d\vec{e_\theta}}{d\theta} \cdot \dot{\theta}$$

$$= -\dot{\theta} \cdot \vec{e_r}$$

$$\Rightarrow \vec{\Gamma} = \vec{\dot{V}} = r\ddot{\theta}\,\vec{e_\theta} - r\dot{\theta}^2\,\vec{e_r}$$

وبالتالي:

$$mr\ddot{\theta}\,\vec{e_\theta} - mr\dot{\theta}^2\,\vec{e_r} = mg\,\vec{i} + R_1\vec{e_r} + R_2\vec{e_r}$$

مع $\vec{i} = \cos\theta\,\vec{e_r} - \sin\theta\,\vec{e_\theta}$

$$\Rightarrow mr\ddot{\theta}\,\vec{e_\theta} - mr\dot{\theta}^2\,\vec{e_r} = mg\cos\theta\,\vec{e_r} - mg\sin\theta\,\vec{e_\theta} + R_1\vec{e_r} + R_2\vec{e_r}$$

وبالتالي

$$-mr\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta + R_1 + R_2 \quad (1)$$

[illegible]

وأيضا

$$mr\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \quad (2)$$

والمعادلة (2) تميز في حركة [illegible] حركة

R.A.Z.

يمكن حل المعادلة ② حلاً تقريبياً عند الاهتزازات الصغيرة يكون $\sin\varphi \simeq \varphi$
فتنتج معادلة خطية تمثل اهتزازات هذا النواس..
أي يمكن حلها بتحويلها إلى معادلة الحركة الاهتزازية.
والفرق بين الحلين هو أن الدور أكبر في معادلة الجيب
وبالتالي سرعة تكون أبطأ من السرعة في الحل التقريبي.

لقد حصلنا على المعادلة ② والمعادلة ① من معادلة برنولي.
وللحصول على المعادلة الثالثة نأتي من نظرية العزم الحركي :

نظرية العزم الحركي: إن مشتق العزم الحركي لمجموعة مادية يساوي مجموع عزوم القوى الخارجية المؤثرة على هذه المجموعة أي

$$\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_O = \sum \underset{O}{\text{mom}}\ \vec{F}_i^{ext}$$

وتتحقق نظرية العزم الحركي صحيحة من أجل مركز الكتلة G أي

$$\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_G = \sum \underset{G}{\text{mom}}\ \vec{F}_i^{ext}$$

وهو نص نظرية العزم الحركي بالنسبة للمركز.

للحصول على المعادلة الثالثة نستبدل الخيط بقوى شده
وبما أنه لا يوجد دوران بالنسبة لـ G وبالتالي العزم الحركي بالنسبة لـ G يساوي الصفر

$$\Rightarrow \frac{d\vec{\sigma}_G}{dt} = \sum \underset{G}{\text{mom}}\ \vec{F}_i^{ext}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{d\,0}{dt}}_{0} = \underbrace{\underset{G}{\text{mom}}\ \vec{G}}_{0} + \underset{G}{\text{mom}}\ \vec{R}_1 + \underset{G}{\text{mom}}\ \vec{R}_2$$

$$\Rightarrow \boxed{\underset{G}{\text{mom}}\ \vec{R}_1 + \underset{G}{\text{mom}}\ \vec{R}_2 = 0} \qquad ③$$

وهي المعادلة الثالثة..

الموضوع

// النظريات العامة: نظرية العزم الحركي:

① مشتق العزم الحركي بالنسبة لنقطة ثابتة يعطى بالعلاقة:

$$\frac{d\vec{\sigma}_0}{dt} = \sum \text{mom}_O \vec{F}_i^{ext}$$

البرهان: ننطلق من كمية الحركة للمجموعة S

- لتكن لدينا مجموعة مادية مكونة من عدة نقاط $S=\{A_1,A_2,\dots,A_n\}$
وكتل هذه النقاط $\{m_1,m_2,\dots,m_n\}$ وشعاعاتها $\vec{r}_1,\vec{r}_2,\dots,\vec{r}_n$
وسرعتها $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n$ وتؤثر عليها القوى الخارجية $\vec{F}_1,\vec{F}_2,\dots,\vec{F}_n^{ext}$
والقوى الداخلية $\vec{F}_1^{int},\vec{F}_2^{int},\dots,\vec{F}_n^{int}$
وبالتالي كمية الحركة لنقطة منه $m_i\vec{v}_i$
نشتق كمية الحركة

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} m_i\vec{v}_i = \vec{F}_i^{ext} + \vec{F}_i^{int}$$

نضرب الطرفين خارجياً بمتجه الموضع للنقطة ذات الدليل i فنجد:

$$\vec{r}_i \wedge \frac{d}{dt} m_i\vec{v}_i = \vec{r}_i \wedge (\vec{F}_i^{ext} + \vec{F}_i^{int})$$

$$\Rightarrow \vec{r}_i \wedge \frac{d}{dt} m_i\vec{v}_i = \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i^{ext} + \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i^{int}$$

حيث $i=1,2,\dots,n$ نجمع هذه المعادلات:

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} r_i \wedge \frac{d}{dt}(m_i\vec{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} \text{mom}_O \vec{F}_i^{ext} + \sum_{i=1}^{n} \text{mom}_O \vec{F}_i^{int}$$

ومنه كما أثبتنا أن $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{int} = 0$ فإنه بنفس الطريقة $\sum_{i=1}^{n} \text{mom}_O \vec{F}_i^{int} = 0$
أما أعمال القوى الداخلية فلا تساوي الصفر
ومنه نجد:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \wedge (m_i\vec{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} \text{mom}_O \vec{F}_i^{ext} + 0 \quad \text{---} (*)$$

لدينا

$$\frac{d}{dt}(r_i \wedge m_i\vec{v}_i) = (\vec{v}_i \wedge m_i\vec{v}_i) + r_i \wedge \frac{d}{dt} m_i\vec{v}_i$$
$$= 0 + r_i \wedge \frac{d}{dt}(m_i\vec{v}_i)$$

ونعلم أن $\vec{V_i}\wedge m_i\vec{V_i}=0$ لأن الجداء الخارجي لشعاعين متوازيين (مرتبطين خطيا) أي مركباتهما متناسبة يساوي الصفر

والجداء الخارجي = طويلة الأول × طويلة الثاني × جيب الزاوية بينهما

وبالتالي $$\frac{d}{dt}(\vec{r_i}\wedge m_i\vec{V_i})=\vec{r_i}\wedge\frac{d}{dt}(m_i\vec{V_i})$$
معوضين في (*)

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}(\vec{r_i}\wedge m_i\vec{V_i})=\sum_{i=1}^{n} \underset{O}{mom}\,\vec{F_i}^{ext}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}(\vec{r_i}\wedge m_i\vec{V_i})=\underset{O}{Mom}\,\vec{F_i}^{ext}$$

وبما أن $\sum_{i=1}^{n}\underset{O}{mom}=\underset{O}{Mom}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\vec{\sigma_0}=\underset{O}{Mom}\,\vec{F_i}^{ext}$$

وهو المطلوب اثباته ..

---

② مبرهنة نظرية العزم الحركي محصلة من أجل مركز الثقل G (حتى لو لا متحركا):

إذا كانت نقطة المقارنة هي مركز الثقل:

$$\Rightarrow \frac{d\vec{\sigma_G}}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\underset{G}{mom}\,\vec{F_i}^{ext}$$

البرهان:

- لتكن جملة مادية S نقاطها $A_1, A_2, \ldots A_n$ وكتلها $m_1, m_2, \ldots m_n$ ومتجهات الموضع $\vec{OA_1}, \vec{OA_2}, \ldots, \vec{OA_n}$ وسرعها $\vec{V_1}, \vec{V_2}, \ldots \vec{V_n}$

انطلاقا من النتيجة:

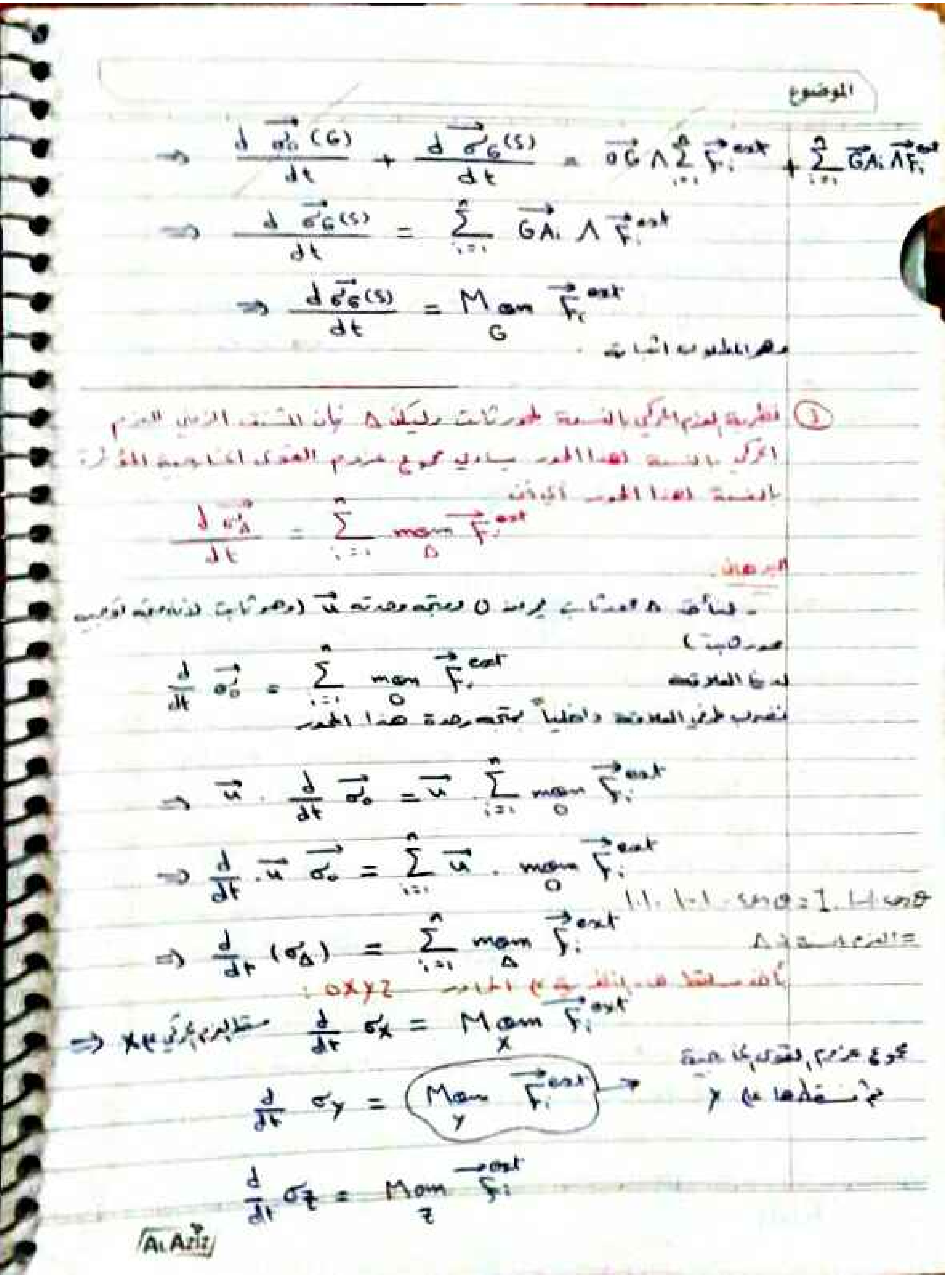
$$\frac{d\vec{\sigma_0}(S)}{dt}=\sum \vec{OA_i}\wedge\vec{F_i}^{ext}$$

لدينا حسب شال $\vec{OA_i}=\vec{OG}+\vec{GA_i}$ وبالتالي من علاقة كونيغ

$$\Rightarrow \vec{\sigma_0}=(\sum m_i)\,\vec{V}(G)+\sum\vec{GA_i}\wedge m_i\,\vec{V}(A,G)$$

$$=\vec{\sigma_0}(G)+\vec{\sigma_G}(S)$$

نشتق منه.



الموضوع

$$\Rightarrow \frac{d\,\vec{\sigma}_O(G)}{dt} + \frac{d\,\vec{\sigma}_G(S)}{dt} = \vec{OG} \wedge \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{ext} + \sum_{i=1}^{n} \vec{GA_i} \wedge \vec{F}_i^{ext}$$

$$\Rightarrow \frac{d\,\vec{\sigma}_G(S)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{GA_i} \wedge \vec{F}_i^{ext}$$

$$\Rightarrow \frac{d\,\vec{\sigma}_G(S)}{dt} = \underset{G}{Mom}\ \vec{F}_i^{ext}$$

وهو المطلوب اثباته .

---

① نظرية العزم الحركي بالنسبة لمحور ثابت مكيف Δ : نجد أن المشتق الزمني للعزم الحركي بالنسبة لهذا المحور يساوي مجموع عزوم القوى الخارجية المؤثرة بالنسبة لهذا المحور أي أن :

$$\frac{d\,\sigma_\Delta}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \underset{\Delta}{mom}\ \vec{F}_i^{ext}$$

البرهان :

- لنأخذ Δ محور ثابت يمر من O ومتجه وحدته $\vec{u}$ (وهو ثابت لأن Δ ثابت وO ثابت)

لدينا العلاقة

$$\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_O = \sum_{i=1}^{n} \underset{O}{mom}\ \vec{F}_i^{ext}$$

نضرب طرفي العلاقة داخلياً بمتجه وحدة هذا المحور

$$\Rightarrow \vec{u} \cdot \frac{d}{dt}\vec{\sigma}_O = \vec{u} \cdot \sum_{i=1}^{n} \underset{O}{mom}\ \vec{F}_i^{ext}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\,\vec{u} \cdot \vec{\sigma}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{u} \cdot \underset{O}{mom}\ \vec{F}_i^{ext}$$

|1|.|1|.sinθ = |.| sinθ

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(\sigma_\Delta) = \sum_{i=1}^{n} \underset{\Delta}{mom}\ \vec{F}_i^{ext}$$

= العزم حول Δ

بأخذ مساقط هذه العلاقة على محاور الجملة OXYZ :

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\sigma_X = \underset{X}{Mom}\ \vec{F}_i^{ext}$$ مسقط العزم الحركي على X

$$\frac{d}{dt}\sigma_Y = \underset{Y}{Mom}\ \vec{F}_i^{ext}$$ → مجموع عزوم القوى الخارجية ثم مسقطها على Y

$$\frac{d}{dt}\sigma_Z = \underset{Z}{Mom}\ \vec{F}_i^{ext}$$

Al Aziz

الموضوع

أما اذا كانت عليه المحاور متحركة فتكون المساقط :

$$\frac{d\vec{\sigma_0}}{dt} = \dot{\sigma}_x \vec{i} + \dot{\sigma}_y \vec{j} + \dot{\sigma}_z \vec{k} + \omega \wedge \vec{\sigma_0}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p & q & r \\ \sigma_x & \sigma_y & \sigma_z \end{vmatrix}$$

وبالتالي المسقط على المحاور المتحركة لمتجه العزم الحركي

$$\Rightarrow \frac{d\vec{\sigma_0}}{dt} = \dot{\sigma}_x \vec{i} + \dot{\sigma}_y \vec{j} + \dot{\sigma}_z \vec{k} + (q\sigma_z - r\sigma_y)\vec{i} + (r\sigma_x - p\sigma_z)\vec{j} + (p\sigma_y - q\sigma_x)\vec{k}$$

- اذا كانت الحركة انسحاب فقط ⇐ $\omega = 0$ ⇐ العلاقة تبقى صحيحة

أي مسقط المشتق = مشتق المسقط كما في حالة المحاور الثابتة .

من تطبيقات النظريات العامة في التحريك :

① نظرية الدفع

② نظرية الصدم

①- نظرية الدفع :

- جسم تم دفعه بزمن مقداره Δt خلال تحركه بسرعة $\vec{V_0}$ وبعد نهاية الدفع أصبحت سرعته $\vec{V}$. احسب القوة التي أوصلت الجسم إلى سرعة $\vec{V}$ ؟

$$m\vec{V} - m\vec{V_0} = \int_0^{\Delta t} \vec{F}\cdot dt = \vec{F}\cdot\Delta t$$

→ الدفع الكلي

(الدفع الجزئي ← $\vec{F}\cdot dt$)

$$\Rightarrow \vec{F} = \frac{m\vec{V} - m\vec{V_0}}{\Delta t}$$

(Δt ← الفترة الزمنية صغيرة)

الدفع : تعرض الجسم لقوة خلال زمن قصير ونعتبر أن هذه القوة لم يطرأ عليها أي تغير خلال هذه الفترة الزمنية .

عزم الدفع :

عزم قوة الدفع

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \vec{OA} \wedge \vec{F}$$

عزم الدفع

$$\Rightarrow d\vec{\sigma} = (\vec{OA} \wedge \vec{F})\, dt$$

$$\Rightarrow \int d\vec{\sigma} = \int_0^{\Delta t} (\vec{OA} \wedge \vec{F})\, dt$$

$$= \vec{OA} \wedge \int \vec{F}\, dt$$



$\Rightarrow \vec{P}_2 - \vec{P}_1 = \sum \wedge (\vec{F} \cdot \Delta t)$

أي أن الدفع الكلي للجملة = الفرق في العزم الحركي بين لحظتين مختلفتين

② ـ ظاهرة الصدم:

ـ نعتبر أن الصدم يتمتع بما يلي:

١ـ تتولد من خلال عملية الصدم قوى تصادم كبيرة جداً قياساً لثقل كل من الجسمين وبالتالي القوى الخارجية المؤثرة تعتبر مهملة أمام القوى الداخلية الناتجة عن الصدم خلال النظام فقط.

٢ـ زمن ظاهرة الصدم صغير جداً وكأنها حدثت وانتهت في لحظة.. وتغير المسافات أثناء الصدم صغير جداً يمكن إهماله..

نتيجة: الصدم يحدث بين نقطتين أو جسمين..

٣ـ القوى الخارجية تعتبر مهملة ← مشتقاتها صفر وبالتالي كمية الحركة ثابتة

وتعتبر المسافة ثابتة والزمن ثابت والقوى الخارجية ٥

وبالتالي تظهر القوة الداخلية فقط لكبرها..

وهنا نطبق نظرية كمية الحركة وبالنسبة لمركز الكتل نطبق نظرية العزم الحركي..

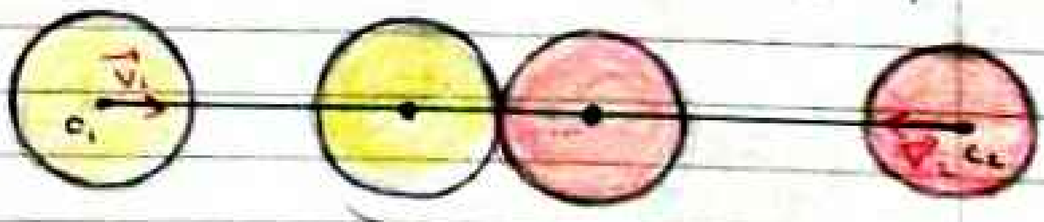
---

* يوجد نوعان للتصادم: مباشر وغير مباشر:

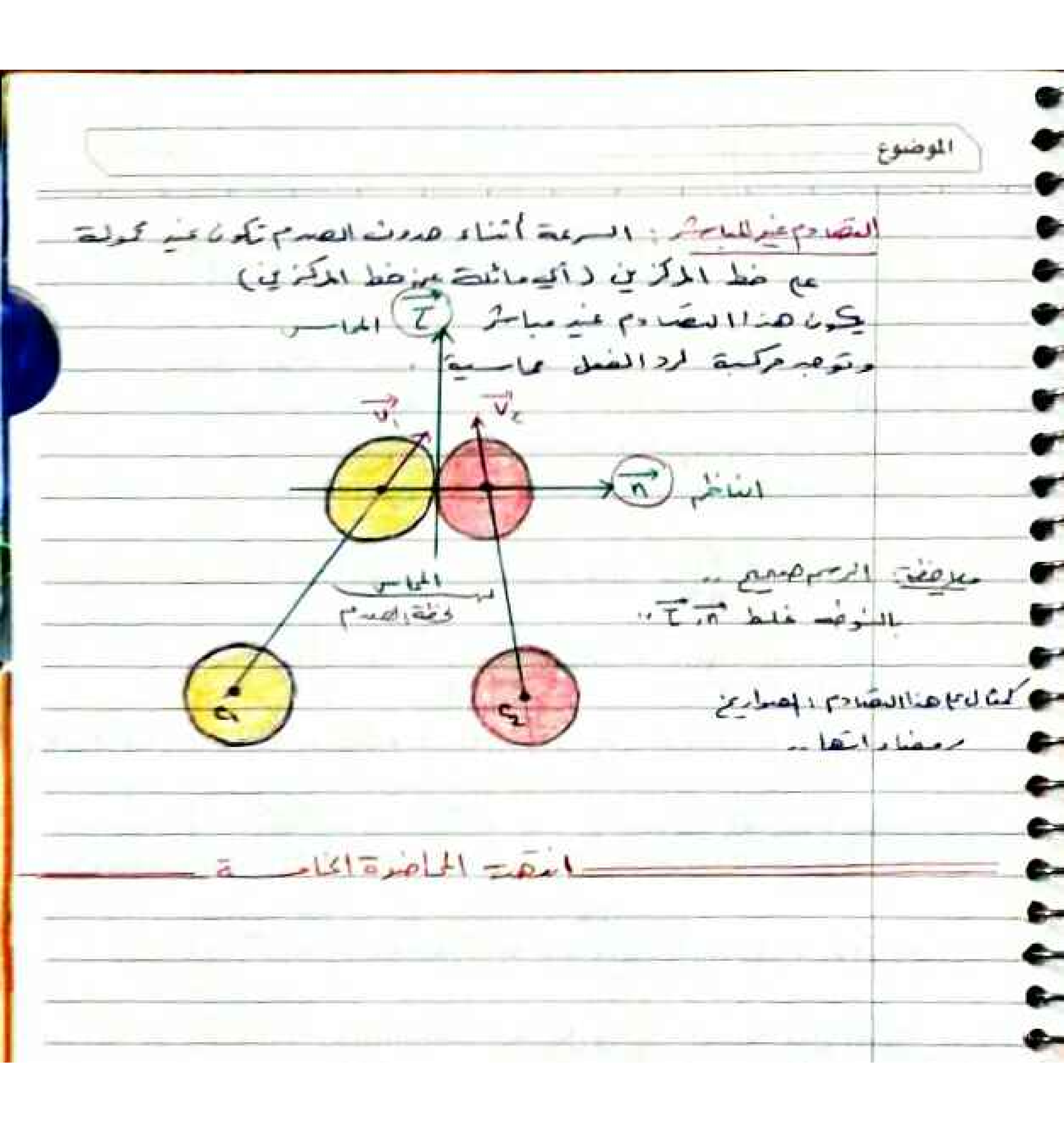
التصادم المباشر:

السرعة محمولة على خط المركزين وبالتالي تنعدم المركبة المماسية لرد الفعل..

وبالتالي القوة المؤثرة أكبر ما تكون..



لحظة الصدم المباشر



الموضوع

التصادم غير المباشر: السرعة أثناء حدوث الصدم تكون غير محمولة مع خط المركزين (أي مائلة عن خط المركزين)

يكون هذا التصادم غير مباشر

وتوجد مركبة لرد الفعل مماسية.

ملاحظة: الرسم صحيح ..
بالنوضع خلط $\vec{n}, \vec{t}$ ..

كمثال عن هذا التصادم: اصطدام
رصاصات بها ..

انتهت المحاضرة الخامسة